COLÉGIO PEDRO II CAMPUS: REALENGO II
MATEMÁTICA II – 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 2026
COORDENADOR: JOÃO CARLOS
Profs: Felipe Pelluso, Roberta Almeida, Thiago Batalha

Lista 2 (TRIGONOMETRIA)

ALUNO : ______________________________ TURMA : __________

1) Comprove a Relação Fundamental para o ângulo de 30º.

$\text{SEN } 30° = \frac{1}{2}$; $\text{COS } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{SEN}^2 30° + \text{COS}^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

PORTANTO, FICA COMPROVADO QUE $\boxed{\text{SEN}^2 30° + \text{COS}^2 30° = 1}$

2) Considere θ a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, de modo que:

$sen\theta = \frac{x+2}{5}$ e $\cos\theta = \frac{2x-1}{5}$, com $x > 0$

Ache o número que fornece o valor de tg θ.

$\text{SEN}^2\theta + \text{COS}^2\theta = 1$

$\Downarrow$

$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2x-1}{5}\right)^2 = 1$

$\frac{x^2 + \cancel{4x} + 4}{25} + \frac{4x^2 - \cancel{4x} + 1}{25} = 1$

$\frac{5x^2 + 5}{25} = 1 \Rightarrow 5x^2 + 5 = 25 \Rightarrow 5x^2 = 25 - 5$

$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{20}{5} \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x_1 = 2$, $x_2 = -2$

OBS: $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

PRODUTO NOTÁVEL: QUADRADO DA SOMA

SE $x = 2$, ENTÃO $\text{SEN}\theta = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}$ E $\text{COS}\theta = \frac{2 \cdot 2 - 1}{5} = \frac{3}{5}$

SE $x = -2$, ENTÃO $\text{SEN}\theta = \frac{2+(-2)}{5} = 0$. ISSO NÃO É POSSÍVEL NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO!

LOGO, $tg\theta = \frac{\text{SEN}\theta}{\text{COS}\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$

3) Determine m de modo que $sen\alpha = \frac{m+2}{10}$ e $cos\alpha = \frac{m}{5}$, sendo α a medida de um ângulo agudo.

$$\underbrace{\text{SEN}^2\theta + \cos^2\theta = 1}_{\Downarrow}$$

$$\left(\frac{m+2}{10}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+4m+4}{100_{/1}} + \frac{m^2}{25_{/4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+4m+4}{100} + \frac{4m^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{5m^2+4m+4}{100} = 1 \Rightarrow 5m^2+4m+4 = 100$$

$$\Rightarrow 5m^2+4m+4-100=0 \Rightarrow \underbrace{5m^2+4m-96=0}_{\text{EQ. 2º GRAU}}$$

$\Delta = 4^2 - 4.5.(-96)$

$\Delta = 16 + 1920$

$\Delta = 1936$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{1936}}{2.5} = \frac{-4 \pm 44}{10}$$

$$m_1 = \frac{-4-44}{10} = -\frac{48}{10}$$

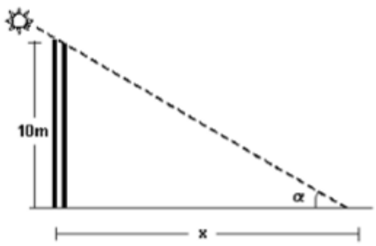
$$m_2 = \frac{-4+44}{10} = \frac{40}{10}$$

LOGO, $m_1 = -4,8$ e $m_2 = 4$

NOTE QUE α É AGUDO, LOGO SEU SENO E COSSENO SÃO POSITIVOS

PORTANTO, $m = 4$

4) Calcule o comprimento da sombra **x** do poste sabendo que sen α = 0,8.



$\text{SEN}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$0,8^2 + \cos^2\alpha = 1$

$0,64 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - 0,64$

$\cos^2\alpha = 0,36$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{0,36}$

$\cos\alpha = \pm 0,6$

α AGUDO $\Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\cos\alpha = 0,6$

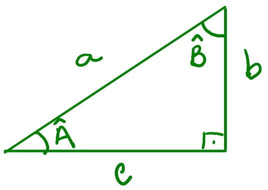
NO TRIÂNGULO: $tg\,\alpha = \frac{10}{x}$

DA TRIGONOMETRIA: $tg\,\alpha = \frac{\text{SEN}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{8^{:2}}{6_{:2}} = \frac{4}{3}$

ENTÃO: $\frac{4}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{4} \quad \therefore x = 7,5\ m$

5) Calcule o valor da expressão:
$A = \operatorname{sen}^2 10^0 + \operatorname{sen}^2 20^0 + \operatorname{sen}^2 30^0 + \operatorname{sen}^2 40^0 + \operatorname{sen}^2 50^0 + \operatorname{sen}^2 60^0 + \operatorname{sen}^2 70^0 + \operatorname{sen}^2 80^0.$

Para resolver esta questão, vamos usar o fato de que se $\hat{A} + \hat{B} = 90°$, então $\operatorname{sen}(\hat{A}) = \cos(\hat{B})$
Esta relação vem da posição de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ como ângulos agudos de um triângulo retângulo.



$\hat{A} + \hat{B} + 90° = 180°$

$\hat{A} + \hat{B} = 90°$

$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{b}{a}$ $\quad \cos\hat{B} = \frac{b}{a}$

$\cos\hat{A} = \frac{c}{a}$ $\quad \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{c}{a}$

$\operatorname{sen}\hat{A} = \cos\hat{B}$

$\operatorname{sen}\hat{B} = \cos\hat{A}$

$A = \operatorname{sen}^2 10^0 + \operatorname{sen}^2 20^0 + \operatorname{sen}^2 30^0 + \operatorname{sen}^2 40^0 + \cancel{\operatorname{sen}^2 50^0} + \cancel{\operatorname{sen}^2 60^0} + \cancel{\operatorname{sen}^2 70^0} + \cancel{\operatorname{sen}^2 80^0}.$

$\cos^2 40° \quad \cos^2 30° \quad \cos^2 20° \quad \cos^2 10°$

$A = \operatorname{sen}^2 10° + \operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 30° + \underbrace{\operatorname{sen}^2 40° + \cos^2 40°}_{1} + \cos^2 30° + \cos^2 20° + \cos^2 10°$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$A = 1 + 1 + 1 + 1 \quad \therefore \quad A = 4$

6) Calcule o valor da expressão
$y = \cos^2 10^0 - \cos^2 20^0 + \cancel{\cos^2 80^0} - \cancel{\cos^2 70^0}.$

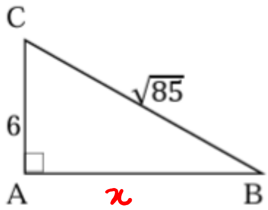
$\operatorname{sen}^2 10° \quad \operatorname{sen}^2 20°$

$y = \cos^2 10° - \cos^2 20° + \operatorname{sen}^2 10° - \operatorname{sen}^2 20° \Rightarrow y = 1 - (\underbrace{\operatorname{sen}^2 20° + \cos^2 20°}_{1})$

1

$\Rightarrow y = 1 - 1 \quad \therefore \quad y = 0$

7) No triângulo retângulo ABC da figura, encontre tgB e tgC.



Pitágoras:

$(\sqrt{85})^2 = 6^2 + x^2$

$85 = 36 + x^2$

$85 - 36 = x^2$

$49 = x^2, \; x > 0 \Rightarrow x = 7$

$tg\hat{B} = \frac{6}{7}$

$tg\hat{C} = \frac{7}{6}$

8) Seja x um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. Sabendo que $sen\, x = \frac{24}{25}$, calcule tg x.

$sen^2 x + cos^2 x = 1$

$\left(\frac{24}{25}\right)^2 + cos^2 x = 1$

$\frac{576}{625} + cos^2 x = 1$

$cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{625}} - \frac{576}{\cancel{625}_{1}}$

$cos^2 x = \frac{625}{625} - \frac{576}{625}$

$cos^2 x = \frac{49}{625}, \; cos\, x > 0$

$\Rightarrow cos\, x = \frac{7}{25} \Rightarrow tg\, x = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$

$\Rightarrow tg\, x = \frac{24}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{25}}{7} \therefore tg\, x = \frac{24}{7}$

9) (PUCRJ) O valor de $\frac{\cos 45° + sen 30°}{\cos 60°}$ é:

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sen 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$

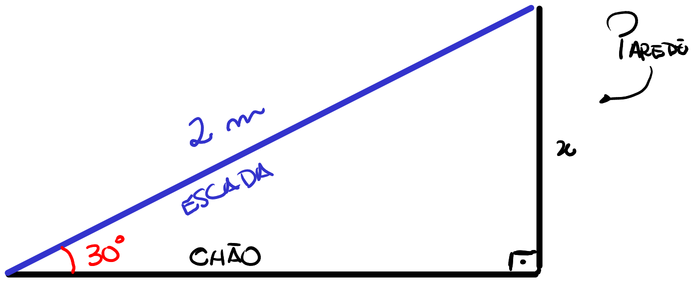
$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{2} + 1$$

A

OBS.
Muitos estudantes erram esse exercício ao cortar o 1/2 que aparece no numerador e no denominador. Essa operação não pode ser feita, pois há uma soma no numerador, e a soma não é inversa da divisão.

10) (CESGRANRIO) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

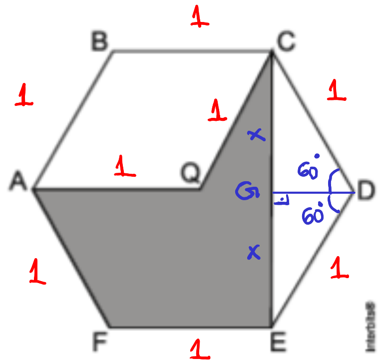
a) 0,5 m b) 1 m c) 1,5 m
d) 1,7 m e) 2 m

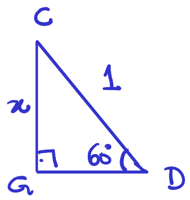


$$\text{SEN } 30° = \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{2} \therefore x = 1 \text{ m}$$

11) Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e Q é o centro da circunferência inscrita a ele. O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a

a) $4+\sqrt{2}$
b) $4+\sqrt{3}$
c) 6
d) $4+\sqrt{5}$
e) $2(2+\sqrt{2})$





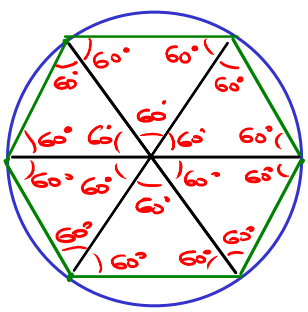
$$\text{SEN } 60° = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

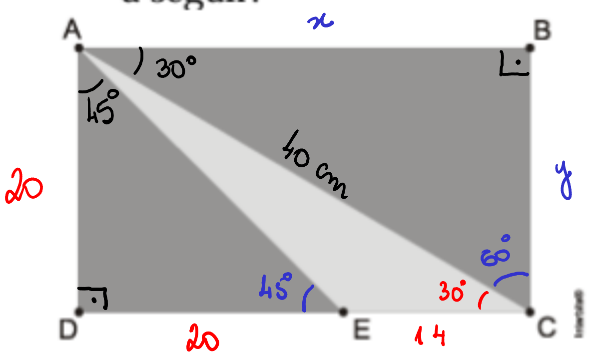
$$\overline{CE} = 2x = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

O PERÍMETRO DE AQCEF É $1+1+1+1+\sqrt{3} = 4+\sqrt{3}$ dm

OBS
Para resolver esta questão é fundamental que o estudante se lembre que:
i) o ângulo interno de qualquer hexágono regular é 120° (oitavo ano do E.F.)
ii) todo hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros congruentes. (nono ano do E.F.)



12) (UERJ) Considere uma placa retangular ABCD de acrílico, cuja diagonal AC mede 40cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções AE e AC, de modo que $D\hat{A}E = 45°$ e $B\hat{A}C = 30°$, conforme ilustrado a seguir:



$sen\,30° = \frac{y}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 20\,cm$

$cos\,30° = \frac{x}{40} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 20\sqrt{3} = 20 \cdot 1{,}7$

$\Rightarrow x = 34\,cm$

Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros. Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3} = 1{,}7$, a área, em cm^2, do triângulo CAE equivale a:

a) 80 b) 100 c) 140 d) 180

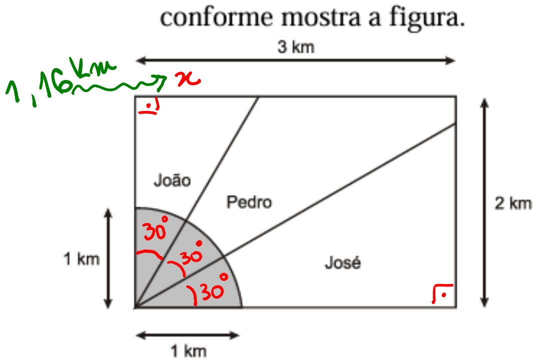
$A_{ACE} = \frac{1}{2}\, ab\, sen\,\theta$

$A_{ACE} = \frac{1}{2}\, 14 \cdot 40 \cdot sen\,30°$

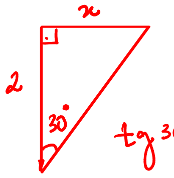
$A_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2}$

$A_{ACE} = 140\,cm^2$

13) (ENEM) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3km x 2km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



JOÃO:



$tg\,30° = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot 0{,}58$

$x = 1{,}16\,km$

ÁREA TOTAL: $3 \cdot 2 = 6\,km^2$

ÁREA JOÃO: $\frac{1{,}16 \cdot 2}{2} = 1{,}16\,km^2$

$\frac{1{,}16}{6} \approx 0{,}193 = 19{,}3\,\%$

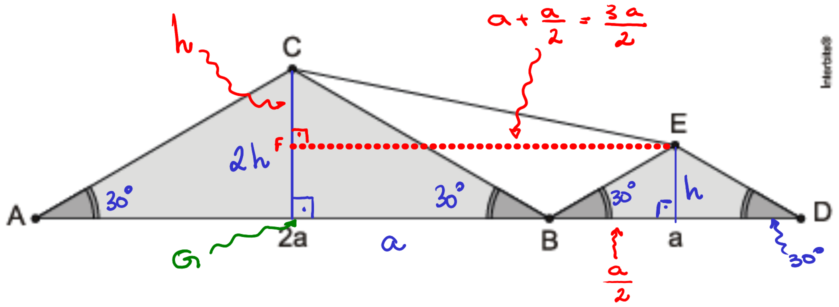
Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$)

a) 50%. b) 43%. c) 37%.
d) 33%. e) 19%.

14) (UNICAMP) Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases 2a e a, respectivamente, e o ângulo $C\hat{A}B = 30°$. Portanto, o comprimento do segmento CE é:

OBS
Como os triângulos ABC e BDE são semelhantes e guardam proporção de 2 para 1, então a altura de ABC é o dobro da altura de BDE.



ΔACG: $tg30° = \dfrac{2h}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{2h}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

a) $a\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ b) $a\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ c) $a\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ d) $a\sqrt{2}$

Pitágoras ΔCFE:

$\overline{CE}^2 = h^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2$

$\overline{CE}^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2$

$\overline{CE}^2 = \dfrac{a^2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{36}\ 12} + \dfrac{9a^2}{4}$

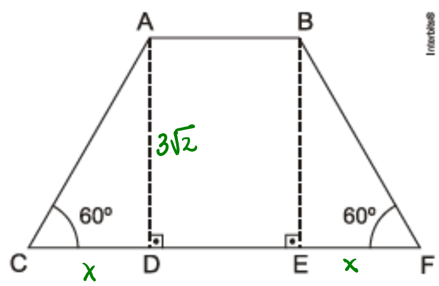
$\overline{CE}^2 = \dfrac{a^2}{12} + \dfrac{9a^2}{4}$

$\overline{CE}^2 = \dfrac{a^2}{12} + \dfrac{27a^2}{12}$

$\overline{CE}^2 = \dfrac{28a^2}{12}\ \begin{matrix}\div 4\\ \div 4\end{matrix} \Rightarrow \overline{CE}^2 = \dfrac{7a^2}{3}$, $\overline{CE} > 0$

$\Rightarrow \overline{CE} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{3}}$ $\therefore \overline{CE} = a\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

15) (MACKENZIE)Se na figura, $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$ e $\overline{CF} = 14\sqrt{6}$, então a medida de $\overline{AB}$ é



$tg60° = \dfrac{3\sqrt{2}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{3}\sqrt{6}}{\cancel{3}}$

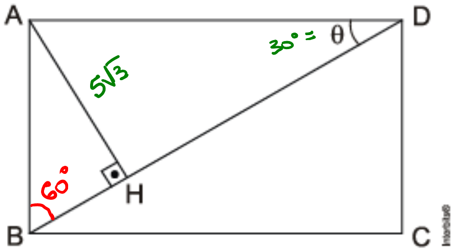
$x = \sqrt{6}$

$\overline{AB} = 14\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$

e

16) Na figura, ABCD é um retângulo em que BD é uma diagonal, AH é perpendicular a BD, $AH = 5\sqrt{3}$ cm e $\theta = 30°$. A área do retângulo ABCD, em centímetros quadrados, é

a) $100\sqrt{3}$.
b) $105\sqrt{3}$.
c) $110\sqrt{3}$.
d) $150\sqrt{2}$.
e) $175\sqrt{2}$.



ΔAHD:

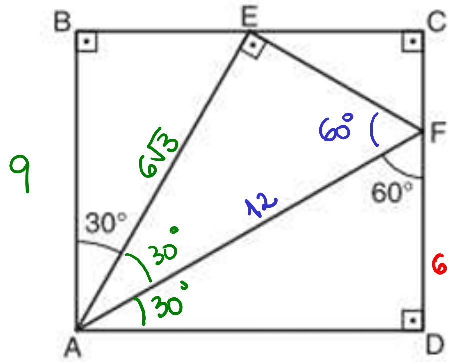
$\text{SEN } 30° = \frac{5\sqrt{3}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AD} = 10\sqrt{3}$ cm

ΔAHB:

$\text{SEN } 60° = \frac{5\cancel{\sqrt{3}}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 10$ cm

$A_{ABCD} = 10\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}$ cm²

17) No retângulo abaixo, AB = 9 cm. Determine a medida do segmento DF.



ΔABE:

$\cos 30° = \frac{9}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AE} = 6\sqrt{3}$ cm

ΔAEF:

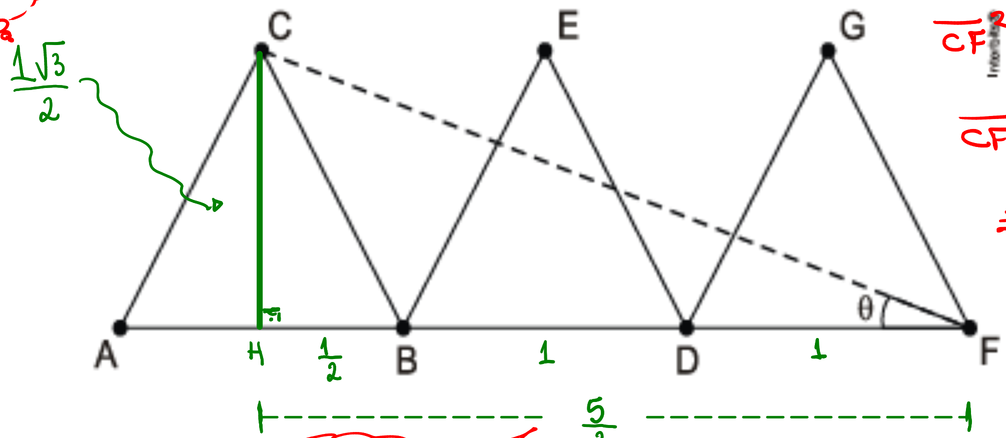
$\cos 30° = \frac{6\cancel{\sqrt{3}}}{\overline{AF}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \overline{AF} = 12$ cm

ΔADF:

$\text{SEN } 30° = \frac{\overline{DF}}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{DF} = 6$ cm

18) Três triângulos equiláteros de lado 1 cm estão enfileirados, como indicado na figura abaixo. Nessas condições, determine o seno do ângulo θ.

ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO!



$1 + 1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

PITÁGORAS ΔFHC:

$\overline{CF}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\overline{CF}^2 = \frac{3}{4} + \frac{25}{4}$

$\overline{CF}^2 = \frac{28}{4} \Rightarrow \overline{CF}^2 = 7$

$\Rightarrow \overline{CF} = \sqrt{7}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{14}$$